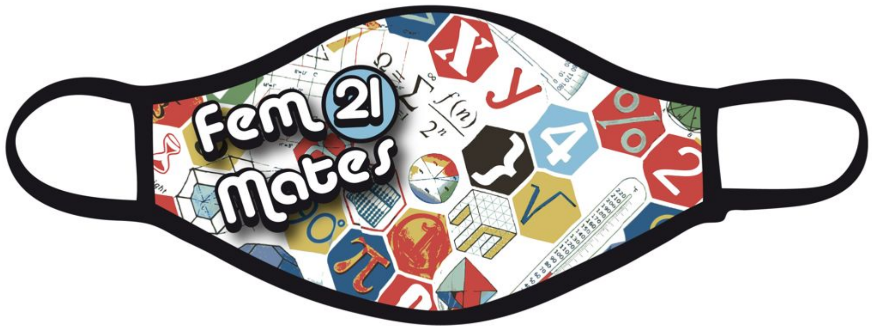


PRIMERA FASE

Nivell 3 - 2n d'ESO

Abans de començar, us recordem que a la primera fase del Fem Matemàtiques hi podeu participar en grups de tres o quatre alumnes. Cadascun d'aquests grups ha de resoldre conjuntament els tres problemes que hi ha a continuació, en aquest cas la divisió del treball no és la millor manera de participar.

En el Fem Matemàtiques es valoren, a més de la correcció dels resultats, altres aspectes, com l'ús d'estratègies originals i la capacitat per explicar el perquè dels possibles resultats numèrics, és a dir, no poden ser fruit d'un full de càlcul sense més explicacions. Intenteu fer els problemes el millor que sapigueu, sense defallir si no trobeu la solució a la primera.

Us recomanem, en la mesura que sigui possible, treballar amb material manipulatiu. Mireu de redactar un informe per a cada problema tan complet i clar com pugueu, fins i tot si algun dels diferents apartats no l'heu pogut acabar com us hagués agradat. D'altra banda, us recomanem que abans d'intentar resoldre un problema us familiaritzeu amb l'enunciat, feu proves i després traieu-ne conclusions.

feemcat
Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

ADEMGi
Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines

1. A LA CAÇA DELS PRIMERS

Els antics grecs van aconseguir demostrar que hi ha infinitat de nombres primers. A mesura que us enfileu per la recta numèrica, mai us quedareu sense primers.

Un dels misteris dels primers és que semblen estar repartits a l'atzar entre els altres nombres. Els matemàtics s'han esforçat durant molts anys per trobar un possible patró, però encara queda molt per descobrir (No sabem si ho sabeu però "*cercar patrons*" és un dels objectius, dèria, obsessió,... dels matemàtics!). Això significa que per trobar nombres primers, o bé trobem el patró de com es distribueixen, o hem d'anar d'un en un, ***a la caça dels primers***!

Hem distribuït tots els nombres de l'1 al 100 a la taula següent:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
…									
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Ratlleu a una taula com l'anterior tots els nombres compostos i la unitat, per tal de descobrir i encerclar quins són els nombres primers. Què observeu de com han quedat repartits? A què creieu que és degut?

Canviem ara de taula i posem els nombres de l'1 al 100 distribuïts en 4 columnes. Després, feu el mateix en una taula de 5 columnes i, finalment, en una de 6. Cerqueu i assenyaleu els nombres primers i observeu com estan distribuïts en cada cas.
(Podeu utilitzar les plantilles que trobareu a l'annex).

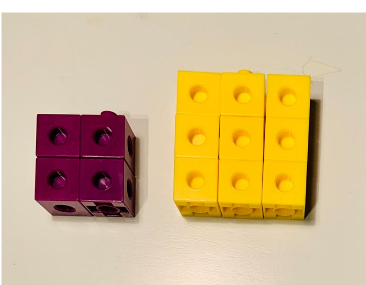
b) Podeu trobar a les diferents taules que heu construït algun tipus de patró visual o guia que ens ajudi a cercar els nombres primers? Podeu donar alguna raó matemàtica de per què és així? Quina taula o taules us permeten localitzar millor els nombres primers?

Seguint a la caça dels primers, trobareu que en alguns casos la distància entre dos nombres primers consecutius és de dues unitats, per exemple el 17 i el 19. Aquestes parelles de nombres primers, s'anomenen *primers bessons.*

c) Encercleu totes les parelles de primers bessons a les taules de diferents columnes que heu fet. Podeu trobar algun tipus de regularitat? I el motiu matemàtic de per què es troben així distribuïts?

d) Seguint amb la cerca de patrons i amb els nombres primers, veiem que és possible relacionar aquests amb un altre tipus de nombres favorits dels matemàtics, els nombres quadrats perfectes (formats a partir d'un nombre natural elevat al quadrat). Per això us proposem aquest últim repte:

Alguns nombres primers es poden formar com a suma de dos quadrats perfectes, per exemple,



$$13 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9$$

En canvi, el 7 no es pot construir així, ja que no hi ha dos nombres quadrats que sumats donin aquest resultat.

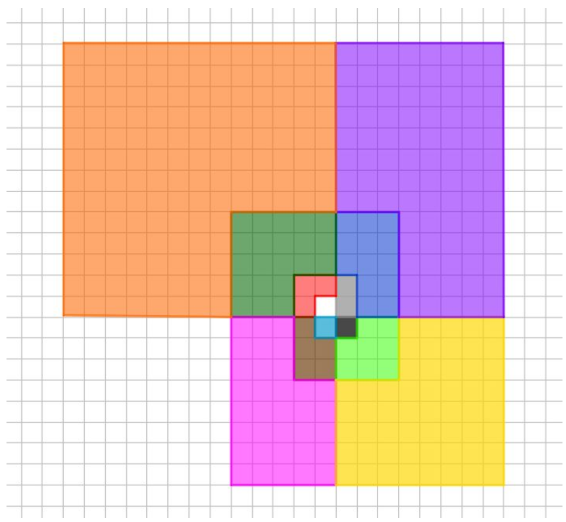
Investigueu sobre els nombres primers més petits que 100 que sí que es poden formar com a suma de dos nombres quadrats. Quins són? Quins no s'han pogut construir així? Per què deu ser així? Raona si aquesta propietat es compliria per a nombres primers majors que 100.

Suggerència: Penseu com ho podeu fer per a no deixar-vos cap suma o per a prendre nota de manera ordenada. No proveu els nombres a l'atzar!

2. L'ESPIRAL DE COLORS

2.1. L'espiral

Construïm una espiral unint peces de diferents colors, tal com es veu a la figura següent. Cada peça està formada per diversos quadrets d'un mateix color. En quadret blanc de l'interior és un forat i cada quadret té àrea 1 cm^2.



a) Trobeu l'àrea de cadascuna de les peces de cada color que es veuen a l'espiral. Podríeu dir quina seria l'àrea de les peces que col·locaríem a continuació per engrandir l'espiral? Justifiqueu la vostra resposta.

b) Continuem l'espiral fins a posar-hi 20 peces i ens fixem en el perímetre exterior de la figura que hem obtingut. Quant val aquest perímetre? Quines són les peces que el delimiten i quina és la seva àrea?

c) Amb aquestes 20 peces, quina àrea cobreix en total l'espiral? Recordeu que hi ha un forat al mig.

2.2. Les peces de l'espiral

Desmuntem l'espiral anterior i observem les primeres figures, a partir de la que té àrea 3:

a) Comproveu que enganxant dues figures consecutives podeu construir la següent. Podeu fer qualsevol moviment amb elles excepte desmuntar-les. Investigueu i expliqueu com fer-ho per a les vint peces de l'espiral.

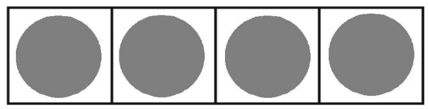
b) Hem separat les figures en dues categories, les grogues i les vermelles, com es veu al dibuix anterior. Classifica-les totes i digues quina relació geomètrica tenen les de cada categoria? Endevineu per què?

c) Trobeu els perímetres de les peces. Hi ha algun patró per a predir-los?

3. EL JOC DE LES FITXES

3.1. Joc de les fitxes en línia

Aquest és un joc per a dos jugadors que juguen per torns i guanya el que retira l'última fitxa, cada jugador en el seu torn pot agafar una o dues fitxes que han de ser de dues caselles adjacents. Feu unes quantes partides i després contesteu.



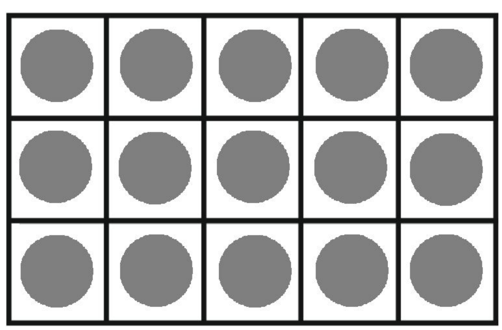
a) Qui té avantatge, el primer jugador o el segon? Com hauria de jugar per tal que pugui guanyar sempre?

b) I si el tauler és de 5 quadrats, quin jugador té avantatge? Com hauria de jugar?

c) I si el tauler té més caselles, quina seria la vostra estratègia guanyadora depenent del nombre de quadrats del taulell?

3.2. Joc de les fitxes en el rectangle

Considerem ara el mateix joc d'abans però, en aquest cas, tenim un tauler de 3 files i 5 columnes ple de fitxes. Igual que abans només podreu treure una o dues fitxes si estan en caselles adjacents (i no en diagonal).

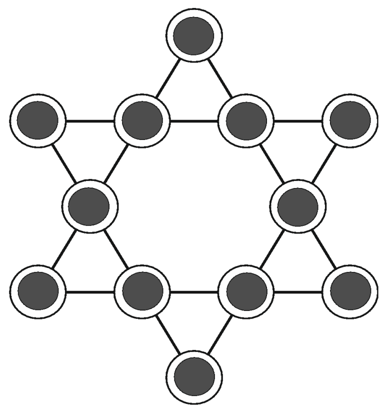


a) Qui té avantatge, el primer jugador o el segon? Com hauria de jugar perquè pugui guanyar sempre?

b) Ara imagineu que hi hagués un rectangle amb n files i m columnes, amb n i m nombres naturals. Quin dels dos jugadors tindrà avantatge? Argumenteu la vostra resposta.

3.3. Joc de l'hexàgon estrellat

Tenim un hexàgon estrellat amb una fitxa a cada vèrtex i una altra a cada vèrtex de l'hexàgon interior.



Juguen 2 jugadors per torns i a cada torn, cada jugador retira 1 o 2 fitxes, però si són 2 fitxes han d'estar connectades amb un segment de manera que entre les dues fitxes no hi hagi cap altra fitxa ni casella buida. El jugador que retira l'última fitxa guanya.

a) Qui té avantatge, el primer jugador o el segon? Com hauria de jugar perquè pugui guanyar sempre?

ANNEX I - A LA CAÇA DELS PRIMERS

TAULES DE NOMBRES

Escriviu els nombres de l'1 al 100 en aquesta taula. Ratlleu tots els nombres que no siguin primers per, finalment, trobar i encerclar tots els nombres primers. *(Recordeu que l'1 no és un nombre primer)*

Taula de 10 columnes

1									
									100

Taula de 4 columnes

1			

			100

Taula de 5 columnes

1				

				100

Taula de 6 columnes

1					
			100		

ANNEX II - JOC DE LES FITXES

TAULERS DE JOC